TEMA 13: CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II.

DERIVADAS (PARCIALES) DE FUNCIONES DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE

Motivación: gases de Van der Waals.

La relación entre presión, temperatura y nº de moles para este tipo de gases obedece la ley (de dependencia)

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) - nRT = 0,$$

donde a, b y R son constantes. En la ecuación anterior, no resulta sencillo despejar el volumen V en función de la presión p y el nº de moles n. Sin embargo, la ecuación de Van der Waals establece una relación de dependencia entre V, p y n, de modo que, por ejemplo, una pequeña variación de la presión ó de n produce un cambio de volumen.

¿Cómo cuantificamos estos cambios de volumen? O, en ~~te~~ ~~en~~ lenguaje matemático, ¿como calculamos las derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_n \quad \text{ó} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_p \; ?$$

En términos matemáticos, se dice que la ecuación de Van der Waals define a V como función implícita de p y n.

Usamos pues el término implícita para cuando NO podemos despejar y obtener de manera explícita V en función de p y n.

Veamos otro ejemplo sencillo. Supongamos que

$$xy = 2.$$

En este caso, $y = y(x) = \frac{2}{x}$. Podemos entonces calcular $\frac{dy}{dx} \equiv y'(x) = -\frac{2}{x^2}$.

En particular, $y'(2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Imaginemos que no podemos despejar $y = y(x)$. ¿Cómo calculamos $y'(2)$?

Escribimos en la ecuación $xy=2$, la dependencia $y = y(x)$ de modo que

$$x\,y(x) = 2.$$

Si derivamos respecto a x en esta ecuación:

$$1 \cdot y(x) + x\,y'(x) = 0$$

y sustituyendo $x=2$, como $x \cdot y = 2$, entonces si $x = 2 \to y = 1$, es decir $y(2) = 1$, y por tanto

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot y'(2) = 0 \to \boxed{y'(2) = -\frac{1}{2}}.$$

Nota.- En algunas ocasiones, la derivada no existe y, por tanto, no se puede calcular mediante derivación implícita. Veamos un ejemplo:

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x = 1, \; y = 0$$

$y = y(x)$. Por tanto,

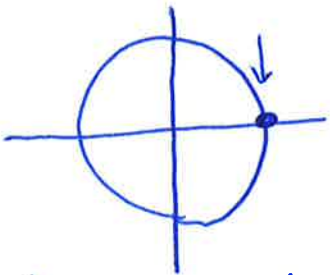
$$x^2 + (y(x))^2 = 1$$

y derivando,

$$2x + 2y(x)\,y'(x) = 0;$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \; y'(1) = 0 \; \cancel{\Rightarrow 2 = 0} \; \text{(NO)}$$

$$y'(1) = -\frac{2}{0} = -\infty$$



Veamos otros ejemplos:

Ejemplo 1: supongamos que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - z = 51$$

define a $z = z(x,y)$ en el punto $(\underbrace{6}_{x}, \underbrace{-3}_{y}, \underbrace{-2}_{z})$

Vamos a calcular

$$\nabla z\,(6,-3).$$

$$36 + 9 + z^2 - z = 51$$

$$z^2 - z + 45 - 51 = 0$$

$$z^2 - z - 6 = 0$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \right.$$

Se tiene: $$x^2+y^2+z(x,y)^2-z(x,y)=51.$$

Derivando respecto a x:

$$2x+2\,z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0;$$

$$2\cdot 6+2\cdot(-2)\frac{\partial z}{\partial x}(6,-3)-\frac{\partial z}{\partial x}(6,-3)=0;$$

$$12-5\frac{\partial z}{\partial x}(6,-3)=0$$

$$\to \quad \frac{\partial z}{\partial x}(6,-3)=\frac{12}{5}$$

Derivando respecto a y (si denotamos $z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$):

$$2y+2z\cdot z_y-z_y=0;$$

$$2\cdot(-3)-4z_y(6,-3)-z_y(6,-3)=0;$$

$$z_y(6,-3)=-\frac{6}{5}$$

Por tanto,
$$\nabla z(6,-3)=\left(\frac{12}{5},-\frac{6}{5}\right).$$

<u>Ejemplo 2</u>. En el caso de sistemas de ecuaciones, se procede siguiendo el mismo procedimiento. Por ejemplo el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{array}\right.$$

define a "z" e "y" como funciones implícitas de x en el punto $(0,0,3)$.

Vamos a calcular $z'(0)$, $y'(0)$, $z''(0)$, $y''(0)$.

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x+y(x)+z(x)=3 \\ x^2+y(x)^2+z(x)^2=9 \end{array}\right\}$$

Derivamos respecto a x:

$$\left.\begin{array}{l} 1+y'(x)+z'(x)=0 \\ 2x+2y(x)y'(x)+2z(x)z'(x)=0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Sustituimos en el punto correspondiente:

$$\begin{array}{l} 1+y'(0)+z'(0)=0 \\ 2\cdot 0+2\cdot 0\cdot y'(0)+2\cdot 3\cdot z'(0)=0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} y'(0)=-1. \\ z'(0)=0 \end{array}$$

Derivamos nuevamente en $(*)$ para obtener las derivadas segundas:

$$\left.\begin{array}{l} y''(x)+z''(x)=0 \\ 2+2y'(x)y'(x)+2y(x)y''(x)+2z'(x)z'(x)+2z(x)z''(x)=0 \end{array}\right\}$$

y sustituyendo en el punto $(0,0,3)$

$$\left.\begin{array}{l} y''(0)+z''(0)=0 \\ 2+2\cdot(-1)(-1)+2\cdot 0\cdot y''(0)+2\cdot 0+2\cdot 3\cdot z''(0)=0 \end{array}\right\}$$

$$z''(0)=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

$$y''(0)=-z''(0)=\frac{2}{3}.$$

Polinomio de Taylor para funciones de varias variables

Recordemos el caso 1D: $f = f(x)$,

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

polinomio de Taylor de grado n de f en x_0.

Error: resto de Taylor

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Caso de la dimensión n: sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in \Omega$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Supongamos que f tiene derivadas parciales hasta orden 2.

Se ~~lo~~ define el polinomio de Taylor de grado 2 de f en x^0 ~~al p~~ como

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\nabla f(x^0)\cdot(x - x^0) + \frac{1}{2!}(x-x^0)^T Hf(x^0)\cdot(x-x^0)$$

donde:

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right) \equiv$ gradiente de f.

$$Hf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x^0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x^0) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x^0) \end{bmatrix} \equiv \text{matriz Hessiana de } f.$$

Ejemplo 1 $\quad f(x,y) = (x^2-3x)e^{y^2}, \quad x^0 = (0,0)$

Vamos a calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de f en el punto $(0,0)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left((2x-3)e^{y^2}, 2y(x^2-3x)e^{y^2}\right)$$

$$\nabla f(0,0) = (-3, 0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x-3)e^{y^2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{y^2} \xrightarrow{(0,0)} 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y(2x-3)e^{y^2} \xrightarrow[(0,0)]{} 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2-3x)e^{y^2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y(2x-3)e^{y^2} \xrightarrow[(0,0)]{} 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x^2-3x)e^{y^2} + 4y^2(x^2-3x)e^{y^2} \xrightarrow[(0,0)]{} 0 \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2!}(x,y)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (-3,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -3x + \frac{1}{2}\cdot x \cdot 2x = \boxed{-3x + x^2}$$

Ejemplo 2 : $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} - z e^{x}$.

Vamos a calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en el punto $(1,1,0)$.

$$f(x,y,z) = f(1,1,0) + \nabla f(1,1,0)\cdot(x-1, y-1, z) +$$

$$+ (x-1, y-1, z)\, Hf(1,1,0)\cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$$

$f(1,1,0) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - z e^{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -e^{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = \cancel{0} - e$$

$$\nabla f(1,1,0) = (1, -1, \cancel{0}\ {-e})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - z e^{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -z e^{x} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,+1,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,+1,0) = +1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -e^{x} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,+1,0) = -e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,-1,0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xy^{-3} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,+1,0) = +2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,+1,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -e^x \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -e^x \longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,+1,0) = -e \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,+1,0) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \cancel{-e}\, 0 \longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,+1,0) = \cancel{-e}\, 0 \end{cases}$$

$$Hf(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & +2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$f(x,y,z) = 1 + (1,-1,-e)\cdot(x-1,\ y-1,\ z)$$

$$+ (x-1, y-1, z)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & 2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= 1 + x - \cancel{1} - y + \cancel{1} - ze + (x-1, y-1, z)\begin{pmatrix} -y+1-ez \\ -x+1+2y-2 \\ -e(x-1) \end{pmatrix}$$

$$= 1 + x - y - ez + (x-y)\cdot(1-y-ez) + (y-1)\cdot(1-x+2y-2) - ez(x-1)$$

$$= 1 + x - y - \cancel{ez} + x - xy - exz - y + y^2 + eyz + y - xy + 2y^2 - 2y - 1 + x$$
$$- 2y + 2 - exz + \cancel{ez}$$

$$= 2 + 3x - 5y - 2xy - 2exz + eyz + 3y^2$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. PROGRAMACIÓN NO LINEAL

DEFINICIONES BÁSICAS

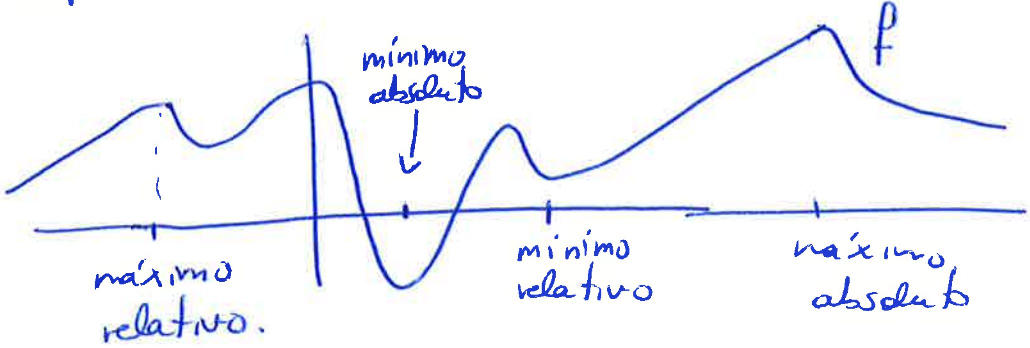
Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

- Se dice que f tiene un "mínimo relativo" (máximo) en x^0 si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x^0) \underset{(\geq)}{\leq} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\|x - x^0\|}_{= \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2}} \leq \epsilon$$

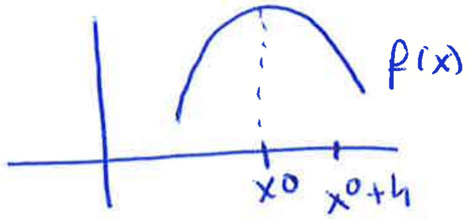
- Se dice que f tiene un "mínimo (máximo) absoluto" en x^0 si $f(x^0) \underset{(\geq)}{\leq} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo



¿Cómo calcular los mínimos y/o máximos relativos y/o absolutos de una función de varias variables?

Recordemos el caso 1D:

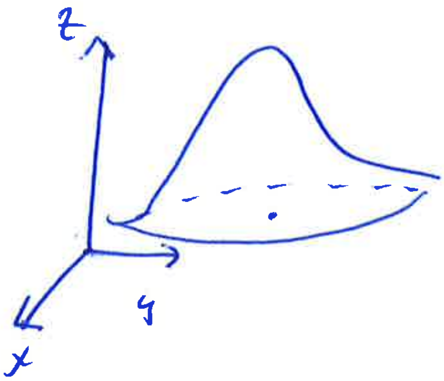


si $h>0$, $\dfrac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h} \leq 0 \ \forall h \xrightarrow[h\to 0]{} f'_+(x^0) \leq 0$

si $h<0$, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x^0)}{h} \geq 0 \ \forall h \xrightarrow[h\to 0]{} f'_-(x^0) \geq 0$.

Por tanto, si f es derivable en x^0, necesariamente se ha de cumplir $f'(x^0) = f'_+(x^0) = f'_-(x^0) = 0$.

Caso 2D:



Supongamos que $f(x^0) \geq f(x) \ \forall x$ cerca de x^0.

Razonando como antes, tanto en el eje x como en el y, x^0 es un máximo.

Por tanto,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0) = 0 \end{cases}$$

TEOREMA (Condición necesaria de optimalidad)

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y supongamos que f tiene en x^0 un extremo relativo (máximo o mínimo).

Entonces,

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right) = (0, \dots, 0).$$

Nótese que, por tanto, las soluciones del sistema (en general, no lineal)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) = 0 \end{cases}$$

son los posibles candidatos a ser máximos y/o mínimos de f.

A las soluciones del sistema anterior se les llama puntos críticos de f.

__Ejemplo 1__: $f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2$

Vamos a calcular los puntos críticos de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y = 0$$

$$-2y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\boxed{P = (0,0)}$$

Ejemplo 2: $f(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2-2xz+2z+2yz-3$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + 2z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -2x + 2y + 8z + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &2x + 2y = 0 \to x = -y \\ &\left.\begin{aligned} 2y + 2z &= 0 \\ 4y + 8z &= -2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -4y - 4z &= 0 \\ 4y + 8z &= -2 \\ \hline 4z &= -2 \\ z &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

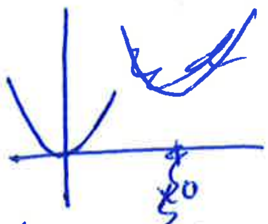
$$2y + 2\cdot -\frac{1}{2} = 0 \to y = \frac{1}{2}$$

$$\to x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

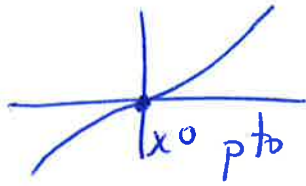
- Sea x^0 un punto crítico de f, ¿cómo sabemos si x^0 es un mínimo o un máximo?

Recordemos el caso 1D: tres posibles casos:



x^0 mínimo ~~máximo~~

máximo ~~máximo~~



x^0 pto de inflexión.

$f_1(x) = x^2$ $\qquad$ $f_2(x) = -x^2$ $\qquad$ $f_3(x) = x^3$

$f_1'(x) = 2x = 0 \to x = 0 \qquad f''(0) = 2 > 0 \to$ mínimo

$f_2'(x) = -2x = 0 \to x = 0 \qquad f''(0) = -2 < 0 \to$ máximo

$f_3(x) = 3x^2 = 0 \to x = 0 \qquad f'''(x) = 6x\big|_{x=0} = 0 \to$ punto de silla.

Caso 2D : $f = f(x,y)$.

Consideramos la matriz Hessiana de f en x^0:

$$Hf(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^0) \end{bmatrix}$$

Supongamos que x^0 es un punto crítico de f. Entonces:

1) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0) > 0$ y $|Hf(x^0)| > 0 \Rightarrow x^0$ mínimo relativo

2) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0) < 0$ y $|Hf(x^0)| > 0 \Rightarrow x^0$ máximo relativo.

3) Si $|Hf(x^0)| < 0 \Rightarrow x^0$ punto de silla

4) Si $|Hf(x^0)| = 0$, x^0 puede ser cualquier cosa (máximo, mínimo o punto de silla).

Ejemplo 1 (revisitado)

$f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2$. $P = (0,0)$ punto crítico.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y \left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \end{array} \right. \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y \left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 \end{array} \right.$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad |Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4$$

$$\boxed{(0,0) \text{ máximo}}$$

Caso de la dimensión n $(n \geq 3)$

x^0 punto crítico de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Consideramos la matriz Hessiana de f en x^0:

$$Hf(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Se tiene:

1) Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ $\Rightarrow$ x^0 mínimo

2) Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, \dots$ $\Rightarrow$ x^0 máximo.

3) Si $|Hf(x^0)| \neq 0$ y $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ no obedece ninguna de las reglas anteriores, entonces no se alcanza ni máximo ni mínimo.

4) Si $|Hf(x^0)| = 0$, x^0 puede ser cualquier cosa.

Ejemplo 2 (revisitado)

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz + 2z + 2yz - 3$$

$$P = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \text{ punto crítico.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 8z - 2x + 2\cancel{y} + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 8$$

$$Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 32 - (8+8) = 16 > 0 \implies P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

mínimo.

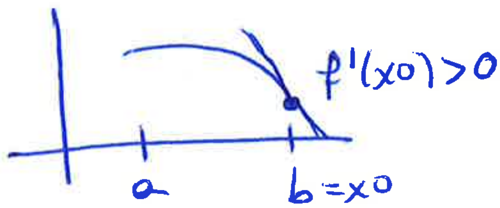
PROGRAMACIÓN NO LINEAL. CASO RESTRICCIONES DE IGUALDAD

Ejemplo modelo

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x) & , x = (x_1, .., x_n) \\ \text{sujeto a } \quad h(x) = 0 & , h = (h_1, .., h_d) \end{cases}$$

Supongamos que f es derivable y que x^0 es un mínimo.

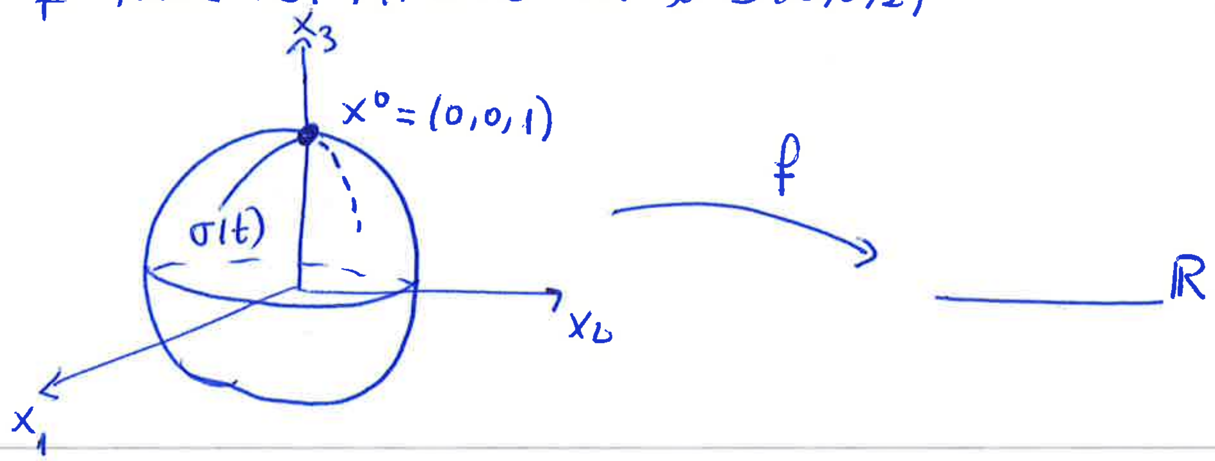
¿ se cumple que $\nabla f(x^0) = 0$? NO



Vamos a deducir cuál es la condición necesaria de optimalidad en este caso: supongamos que

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$ esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1.

y que f tiene un mínimo en $x^0 = (0,0,1)$



Consideremos una curva

$$\sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \sigma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

tal que:

(a) $\sigma(0) = x^0$

(b) $\sigma(t)$ cumple la restricción, es decir, $h(\sigma(t)) = 0 \ \forall t$.

Consideremos ahora la función (de una sóla variable real)

$$[-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(\sigma(t)) = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Obviamente, si x^0 es un mínimo de $f(x)$ sobre toda la superficie $h(x) = 0$, entonces, en particular, también lo es sobre la curva σ, es decir $f(\sigma(t))$ tiene un mínimo en $t = 0$. Por tanto,

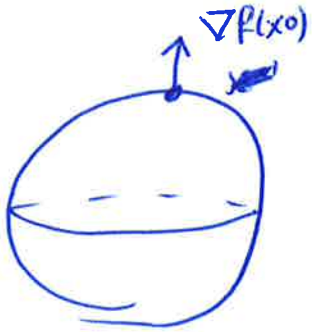
$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\sigma(t)) \underset{\substack{\text{regla de} \\ \text{la cadena}}}{=} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \right|_{t=0}$$

$$= \nabla f(\sigma(0)) \cdot \sigma'(0).$$

~~Conclusión; los vectores $\nabla f(x^0)$ y $\sigma'(0)$ son perpendiculares,~~

$\nabla f(x^0) \perp \sigma'(0)$ para toda curva σ que cumple (a) y (b).

Necesariamente, $\nabla f(x_0)$ está en el eje z, apuntando hacia arriba o hacia abajo.



Recordemos que también se cumple $h(\sigma(t))=0 \quad \forall t$.

Derivando respecto a t en esta igualdad,

$$0 = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{dx_3}{\partial t}$$

y sustituyendo $t=0$,

$$0 = \nabla h(\underbrace{\sigma(0)}_{x^0})\cdot\sigma'(0)$$

Por tanto, también $\nabla h(x_0) \perp \sigma'(0)$ para toda σ que cumple a) y b)

y así $\nabla f(x_0)$ y $\nabla h(x_0)$ son paralelos, con lo cual existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{\nabla f(x_0) + \lambda \nabla h(x_0) = 0}$$

Esta es la condición necesaria de optimalidad en el caso de restricciones de igualdad.

TEOREMA (Multiplicadores de Lagrange)

Sean $f, g \in C^1$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{sujeto a} & \\ & h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Si $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ es un mínimo de f, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$, llamado multiplicador de Lagrange, tal que

$$\nabla f(x^0) + \lambda \nabla h(x^0) = 0.$$

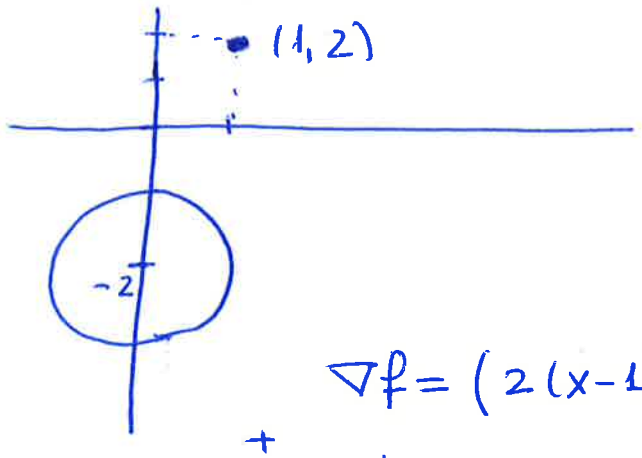
Nota.- Nótese que como $\lambda \in \mathbb{R}$ es desconocido, este λ junto con $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ son $n+1$ incógnitas. Necesitamos pues $n+1$-ecuaciones. Estas $n+1$-ecuaciones son:

$$\begin{cases} \nabla f(x^0) + \lambda \nabla h(x^0) = 0 \\ h(x^0) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & h(x,y) = x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Significado ~~[illegible]~~ geométrico del problema: distancia mínima del punto $(1,2)$ a la circunferencia de centro $(0,-2)$ y radio 1.



$$\nabla f = (2(x-1),\ 2(y-2))$$

$$+\quad \nabla h = (2x,\ 2(y+2)) \times \lambda$$

$$\nabla f + \lambda \nabla h = (2(x-1) + \lambda 2x,\ 2(y-2) + \lambda \cdot 2(y+2)) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(x-1) + 2x\lambda = 0 \\ 2(y-2) + 2(y+2)\lambda = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \lambda = -\dfrac{x-1}{x} \\ \to \lambda = -\dfrac{y-2}{y+2} \to \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{y-2}{y+2}; \end{array}$$

$$(y+2)(x-1) = x(y-2);$$

$$\cancel{xy} - y + 2x - 2 = \cancel{xy} - 2x \to y = 4x - 2 \quad = 4\frac{\pm 1}{\sqrt{17}} - 2 =$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{17}} - 2$$

$$x^2 + (4x - 2 + 2)^2 - 1 = 0;$$

$$x^2 + 16x^2 = 1 \to 17x^2 = 1 \to x = \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad y = -\frac{4}{\sqrt{17}} - 2$$

Candidatos

$$P1 = \left(\frac{1}{\sqrt{17}},\ \frac{4}{\sqrt{17}} - 2\right),\quad P2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\ -\frac{4}{\sqrt{17}} - 2\right)$$

Sustituyendo en la función objetivo ambos puntos se comprueba que $f(P_1) < f(P_2)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_1 & \text{mínimo} \\ P_2 & \text{máximo} \end{array}}$$